Теорема Холла I

1. Теорема Холла. В деревне живут n юношей и несколько девушек. Докажите, что всех юношей можно поженить на знакомых им девушках, если и только если для каждого $k = \overline{1,n}$ и любой группы из k юношей найдётся не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из них.

2. У Пети есть два листа бумаги размера 10×10. Вася расчертил их на 100 многоугольников равной площади, а после положил один лист поверх другого. Докажите, что Петя сможет воткнуть 100 булавок, проколов все многоугольники.

3. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Докажите, что можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

4. Однокруговой турнир по теннису, в котором участвовало $2n$ команд, длился $2n-1$ день, причём каждая из команд играла ровно одну игру в день. Всегда ли для каждого дня турнира можно выбрать команду, которая победила в этот день, так, чтобы выбранные команды не повторялись?

5. Пусть $d < n$. В деревне живут n юношей и несколько девушек. Докажите, что, если для любого $k \in \{d+1, d+2, \ldots, n\}$ и любой группы из k юношей найдётся не менее $k-d$ девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из них, то $n-d$ юношей можно поженить на знакомых им девушках.

6. В классе учатся 42 школьника. Среди любых 33 одноклассников есть мальчик и девочка, дружащие между собой. Докажите, что в классе можно образовать не менее 10 непересекающихся пар друзей, состоящих из мальчика и девочки.

7. Дана таблица $m \times n$. *Горизонтальный ход* – любая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остаётся в своей строке; аналогично определяется *вертикальный ход*. Найдите такое k, что за k ходов можно получить любую перестановку элементов, но существует перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.